MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

AdAUSI II

DEFINIZIONI

- **Punto interno** sia $x_0 \in \Omega \in \mathbb{R}^n$, x_0 è punto interno di Ω se:
  1: $x_0 \in \Omega$
  2: $\exists \delta > 0$ t.c. $B_\delta(x_0) \in \Omega$



- **Punto di Frontiera** x_0 è punto di frontiera di Ω ($x_0 \in \mathcal{F}\Omega$) se
  $\forall \delta > 0 \quad \exists \{x_1, x_2 \mid x_1 \in B_\delta(x_0), x_2 \notin \Omega\}$ t.c. $x_1 \in \Omega \cap B_\delta(x_0)$
  $x_2 \notin \Omega$, $x_i \in B_\delta(x_0)$



- **Insieme Chiuso** Ω si dice chiuso se contiene $\mathcal{F}\Omega$
- **Insieme aperto** Ω si dice aperto se $\mathcal{F}\Omega \notin \Omega$
- **Punto di accumulazione** $x_0 \in \partial\Omega$ (insieme dei p. di accumulazione) se
  $\forall \delta > 0 \quad \exists x \neq x_0 \in \Omega \cap B_\delta(x_0), x \neq x_0$
- **Punto isolato** x_0 di Ω è isolato se $\exists \delta > 0$ t.c. $\Omega \cap B_\delta(x_0) = \{\emptyset\} + \{x_0\}$
- **Diametro di un insieme** $d(\Omega) = \sup |x - y|$ con $x, y \in \Omega$
- **Succ. Convergente** Sia x_m, $x_m \to l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \mid \forall m > m_0 \; |x_m - l| < \varepsilon$
  $d(x_m, l) < \varepsilon$, $x_m \in B_\varepsilon(l)$

- **Funzioni omogenee** $f(x) \; X \to \mathbb{R}^m$ è detta omogenea di grado α se
  $\forall t \neq 0 \quad f(tx) = t^\alpha f(x)$

- **Curva di livello** $\gamma[a,b] \to \Omega \quad f: \Omega \to \mathbb{R} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ la cdl è data $\nabla(f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$
  $\nabla f(\gamma(t)) \perp \dot{\gamma}(t) = 0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- **Derivata direzionale di $f(x)$ in x_0 nella direzione $\vec{v}$**

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial v} = f_v(x_0)$$

- **Derivata parziale di $f(x)$**

Sia $f(x)$ $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e siano $e_1, \dots, e_m$ i versori della base per $\mathbb{R}^m$.

$\frac{\partial f(x_0)}{\partial e_i}$ è l'i-esima derivata parziale di f in x_0

- **Differenziale** $f\ \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice differenziabile in $x_0 \in \Omega$ se $\exists A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ LINEARE t.c. A detto differenziale di f

$$\lim_{w\to 0} \frac{|f(x_0+w)-f(x_0)-A(w)|}{|w|} = 0$$

- **Gradiente di f** Sia $f\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, il vettore $\nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_m} \end{pmatrix}$ le cui componenti sono le n-derivate parziali di f rispetto a ciascuna direzione dei versori di $\mathbb{R}^m$ è detto gradiente di f.

- **Matrice Jacobiana** Sia $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ la matrice $m \times m$ che ha per righe gli m gradienti delle m componenti scalari di f e per colonne le derivate parziali della medesima componente

$$J\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad m \times m$$

- **Matrice Hessiana** Sia $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ la matrice $n \times n$ simmetrica che ha per riga il gradiente rispetto ad ogni componente del gradiente di f

$f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \nabla \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad Hf \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

- **Campo di Vettori** $A\ \Omega \to \mathbb{R}^m \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \quad A(x) = \begin{pmatrix} A_1(x) \\ \vdots \\ A_n(x) \end{pmatrix}$

- **Forma differenziale** Sia $A\ \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\alpha : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è detta f. diff. di A se $\alpha(x, \omega) = A \cdot \omega = A_1(x_1 \dots x_m)\, dx_1 + \dots + A_m(x_1 \dots x_m)\, dx_m$

- **Campo Integrabile** $A\ \Omega \to \mathbb{R}^m$ si dice integrabile se $\exists f\ \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f \equiv A$ su tutto Ω. f è detto POTENZIALE o PRIMITIVA di A

- **Forma esatta o integrabile** $\alpha\ \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è detta chiusa o integrabile se $\exists f\ \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $df \equiv \alpha$ su tutto $\Omega \times \mathbb{R}^m$

- **Integrale del campo esteso ad una curva** Sia $A\ \Omega \to \mathbb{R}^m$ e $\gamma : [a,b] \to \Omega$
$$\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

- **Campo Irrotazionale** Sia $A\ \Omega \to \mathbb{R}^m$, A si dice irrotazionale se $(A_i)_j = (A_j)_i \quad \forall i \neq j$ e $i, j \in [1 \dots n]$. La α associata ad A è detta FORMA CHIUSA

- **Insieme connesso** Ω si dice connesso se $\forall x_1, x_2 \quad \exists \gamma : [0,1] \to \Omega$ γ continua e $\gamma(0) = x_1$ $\gamma(1) = x_2$

- **Insieme Convesso** Ω si dice convesso se $\forall x_1, x_2 \quad \overline{x_1 x_2} \in \Omega$

- **Insieme semplicemente connesso** Ω si dice semplicemente c. se $\forall \gamma$ chiusa $\gamma[0,1] \to \Omega$ $\exists h\ [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ t.c. $h(0,t) = \gamma$ e $h(1,t) = \sigma$ con $\sigma(t) = x_0$ costante su Ω

- **Insieme stellato** Ω si dice stellato se $\exists x_0$ t.c. $\forall x \in \Omega \quad \overline{x x_0} \in \Omega$, x_0 è detto Polo della STELLA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- **Lunghezza di una curva** — Sia $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ e $\Pi_{a,b}$ partizione di $[a,b]$

$$\lambda(\gamma)=\sup_{\pi}\left(\lambda(\gamma,\pi)\right)$$

Se $\lambda(\gamma)<+\infty$ allora γ si dice rettificabile

Se $\gamma\in C^1([a,b]\to\mathbb{R}^m)$ $\quad\lambda(\gamma)=\int_a^b|\dot\gamma(t)|\,dt$

- **Curve regolari** — $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ si dice regolare se

1. $\gamma\in C^1$ in $[a,b]$
2. $\dot\gamma(t)\neq 0\ \ \forall t\in[a,b]$

- **Intervallo** — Prodotto cartesiano

$$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\cdots[a_m,b_m]$$

- **Pluriintervallo** — Unione finita di intervalli

$$\pi=\bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad \text{t.c.} \quad I_i\cap I_j=\{a\} \ \text{per}\ i\neq j$$

- **Misura di un intervallo** $\quad m(I)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_m-a_m)$

- **Misura di un pluriintervallo** $\quad m(\pi)=\sum m(I_i)$

Se Ω è aperto e π_i sono pluriintervalli di Ω $\quad m(\Omega)=\sup_{\pi\subseteq\Omega} m(\pi)$

- **Insiemi misurabili** — Sia $E\subseteq\mathbb{R}^m$ compatto si definisce

$$m^*(E)=\inf_{\substack{\Omega\supseteq E\\ \text{aperto}}} m(\Omega)$$

$$m_*(E)=\sup_{\substack{K\subseteq E\\ \text{compatto}}} m(K)$$

E si dice misurabile (secondo Lebesgue) se $m^*(E)=m_*(E)$

- **Integrale di f lim su E fin**

$m(E) < +\infty$ e f limitata su E

Sia $\pi \{E_1 \sim E_n\}$ Una partizione per E

t.c. $E_i \cap E_j = 0 \quad \forall i \neq j \in \mathbb{N}$ e $(\bigcap^{-1}) E_i = E$

$$\sigma_\pi = \sum_{i=1}^{n} m(E_i) \inf_{E_i}(f) \quad \rightarrow \quad \underline{\int}_E f = \sup_\pi \sigma_\pi$$

$$\Sigma_\pi = \sum_{i=1}^{m} m(E_i) \sup_{E_i}(f) \qquad \overline{\int}_E f = \inf_\pi \Sigma_\pi$$

$$\int_E f = \underline{\int}_E f = \overline{\int}_E f \quad \text{se integrale e sesso uguali}$$

- **Integrale doppio di $f(x,y)$**

Sia E misurabile

$$\int_E f(x,y) = \iint_E f(x,y)\, dx\, dy$$

- **Integrale tripla di $f(x,y,z)$**

Sia $T \{(x,y,z)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\int_T f(x,y,z) = \iiint_T f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

- **Coordinate Polari Piane**

$$(x,y) \rightarrow (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \qquad \theta \in]0, 2\pi[$$

$$|\rho| = \rho \rightarrow \rho \geq 0$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \rho$$

- **Coordinate Polari Cilindriche**

$$(x,y,z) \rightarrow (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \qquad \theta \in]0, 2\pi[\quad \rho \geq 0$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,y,z)}\right| = \rho$$

- **Coordinate Polari Sferiche**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0, \pi] \\ \rho \geq 0 \end{matrix}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,\rho,\varphi)}\right| = \rho^2 \sin\varphi$$

master COPY CORTERIA 030/8312126 338/9837745